政治学方法論 I

R を使った統計分析の基礎

矢内 勇生

大学院法学研究科・法学部

2016 年 4 月 20 日

神戸大学

今日の内容

1. 数量分析の基礎
   - データとは何か
   - データの要約
   - 統計量
2. 確率と確率分布
   - 確率
   - 様々な確率分布

R のコードと説明

授業のウェブページ：

URL `http://www.yukiyanai.com`

→ 授業

→ 政治学方法論 I

→ 授業の内容

→ 「R による統計分析の基礎」

データ

データ：data（複）– datum（単）

調査、観察などによって集められた情報

- 数量データ：年齢、年収、人口、GDP、etc.
- 質的データ：性別、支持政党、投票参加、etc.

どんなデータに興味がある？

- 観察の対象（観察単位：unit of observation）によって値が変わるもの：変数 (variable)
  - 年収や支持政党は人によって違う
- 値が変わらないもの（定数：constant）には興味がない
  - 女子高生の性別、学生の職業、etc.

変数に興味がある！

- 変数 (variable) とは
  - 数（値）が一定でない = 変化する数（変な数ではない）
  - 様々な（少なくとも２つ以上の）値をとる：分布する
- 値が一定のもの：定数 (constant)

変数の分類

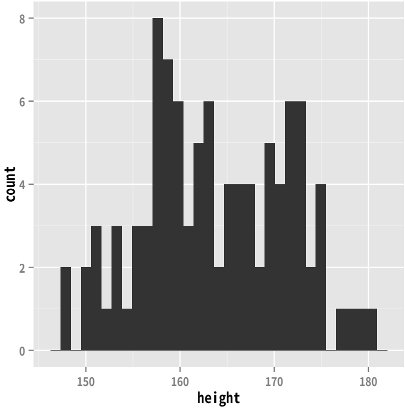
- 量的変数
  - 比率 (ratio scale)
  - 間隔 (interval scale)
- 質的変数
  - 順序 (ordinal scale)
  - 名義 (nominal scale)

変数の種類とその特性

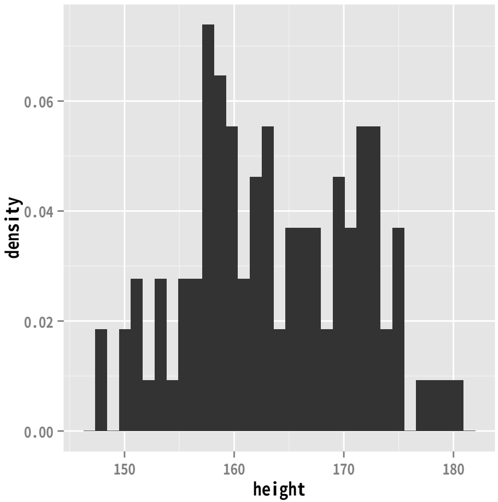
変数の種類		異なる値の間の 異同	順序	差	比
質的変数	名義尺度	○	×	×	×
	順序尺度	○	○	×	×
量的変数	間隔尺度	○	○	○	×
	比率尺度	○	○	○	○

変数の視覚化：ヒストグラム

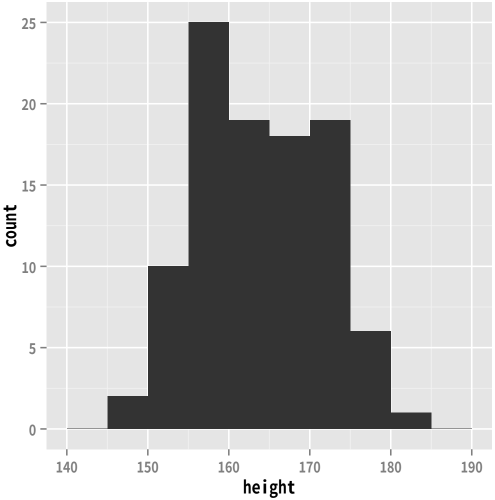
- ヒストグラム (histogram) を描いて変数の分布を確認する
  - 分布の中心は？
  - 左右対称か?
  - 大きな山はいくつあるか？
  - どれくらいの範囲に広がっているか？
- 右図：身長（授業用データ）の分布



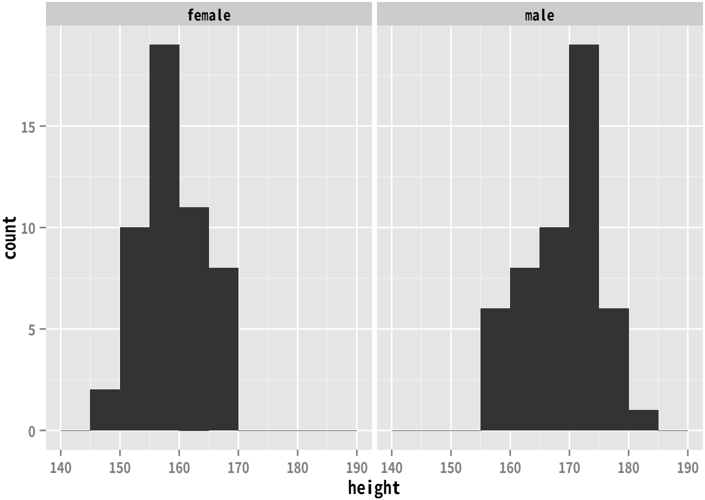
ヒストグラム：縦軸を確率密度に変える



ヒストグラム：ビンの幅を変える

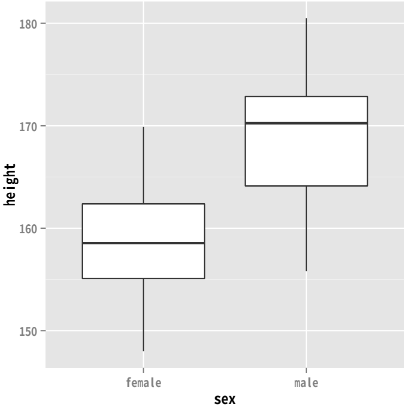


ヒストグラム：グループ分けする



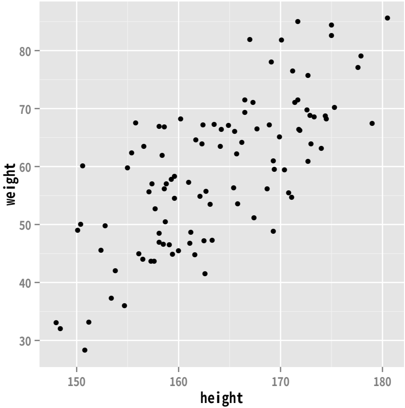
変数の視覚化：箱ひげ図

- 箱ひげ図　(box[and whiskers] plot) を描いて変数の分布を比較する
- 箱ひげ図を見ると、変数の最小値（外れ値を除く）、第 1 四分位点、中央値、第 3 四分位点、最大値（外れ値を除く）がわかる
- 右図：身長（授業用データ）の男女別分布

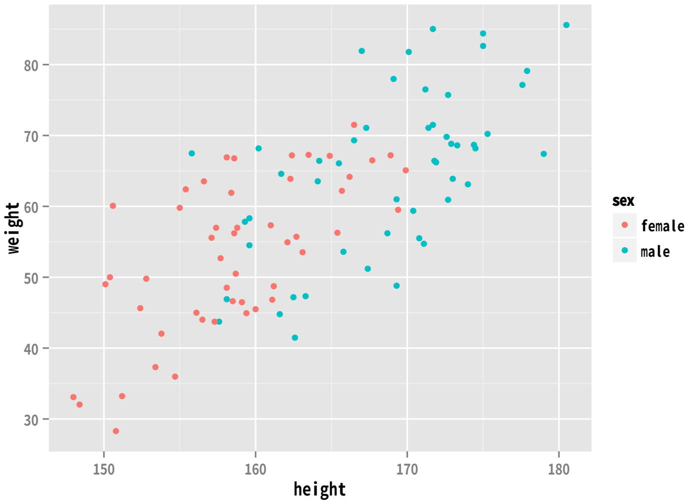


変数の視覚化：散布図

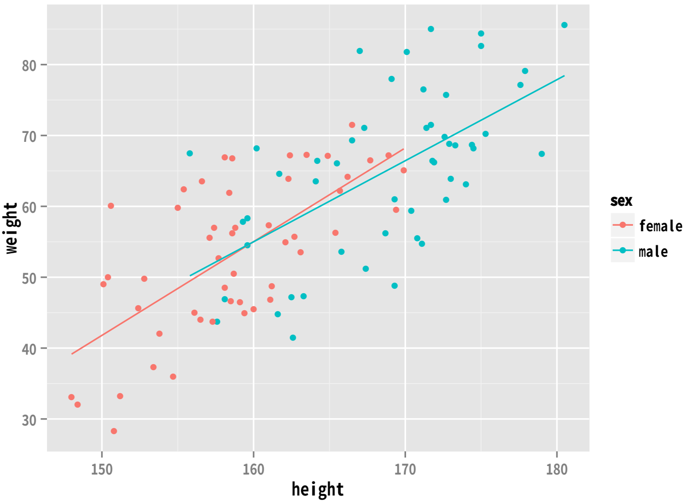
- 散布図　(scatter plot) を描いて 2 変数の関係を確認する
- 本当は無関係でも、パタンをあるように見えることがあることに注意する
- 右図：身長と体重（授業用データ）の散布図



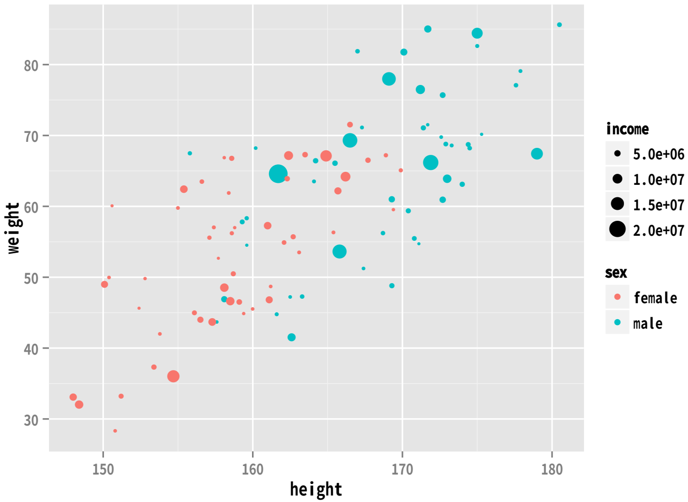
散布図：グループごとに色分けする



散布図：関係を直線で示す



散布図：次元を増やす


80
70
60
50
40
30
weight
150
160
170
180
height
income
5.0e+06
1.0e+07
1.5e+07
2.0e+07
sex
female
male

5 次元!

https://www.youtube.com/watch?v=jbkSRLYSojo

統計量

統計量 (statistic) とは

- 変数の「ある特徴」を表す数式
- 決められた方法（アルゴリズム）を使うことによって得られる
- 様々な統計量がある

中心的傾向を表す統計量：算術平均 (mean)

- 変数 x の平均値（算術平均, 相加平均, **mean**）を $\bar{x}$ と表し（「エックスバー」と読む）、

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

である
- 算術平均はヒストグラムの重心である
- 算術平均は外れ値 (outlier) の影響を受け易い

中心的傾向を表す統計量：中央値 (median)

- 変数 x の中央値（中位値, **median**）とは

$$\int_{-\infty}^{m} dF(x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \int_{m}^{\infty} dF(x) \geq \frac{1}{2}$$

を満たす m のことである（$F(x)$ は x の累積分布関数）

- 簡単に言い換えると、変数を小さい順（大きい順）に並べ替えたとき、ちょうど真中にある値である
- 真中がないとき（変数の長さ n が偶数のとき)、真中を挟む 2 つの値の算術平均を用いる
- 中央値は外れ値の影響を受けにくい
- 分布が左右対称なとき、算術平均と中央値は一致する

ばらつきを表す統計量：四分位範囲 (IQR)

- 変数 x の四分位範囲（inter-quartile range: **IQR**）は、第 3 四分位数点 $(Q_{3/4})$ と第 1 四分位点 $(Q_{1/4})$ の差、つまり

$$\text{IQR} = Q_{3/4} - Q_{1/4}$$

である
- 四分位点とは、変数を小さい順に 4 つの個数が等しいグループに分けたとき、グループの境界となる点のことである
  - 例：$x = \{0, 1, 1, 2, 4, 8, 9, 10\}$ のとき
  - 第 1 四分位点は 1、第 3 四分位点は 8.5（2.5 と 7.5 ではない！）
- IQR は箱ひげ図の箱の高さ（横にした場合は幅）を表す
- IQR は外れ値の発見に利用される
  - $[Q_{1/4} - 1.5\text{IQR}, Q_{3/4} + 1.5\text{IQR}]$ の範囲外を外れ値とみなす

ばらつきを表す統計量：分散

- 変数 x の不偏分散（unbiased **variance**）を u_x^2 と表し、

$$u_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

  である
- 分散は変数のばらつき（分布の広がり）を表す：数値が大きいほどばらつきが大きい
- 分散は必ず正の値をとる（ただし、定数の分散は 0）

上の式で表されるものは不偏分散と呼び、分母の $n-1$ を n に変えたものを「分散」と呼ぶ場合がある

ばらつきを表す統計量：標準偏差

- 変数 x の分散の平方根を標準偏差（**standard deviation: sd**）と呼ぶ
- 標準偏差を u_x と表し、

$$u_x = \sqrt{u_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

  である
- 分散の単位が「変数の単位の二乗」になってしまうのに対し、標準偏差の単位は変数そのものの単位と同じである

上の式で表されるものは「不偏分散の平方根」と呼び、分母の $n-1$ を n に変えたものを「標準偏差」と呼ぶ場合がある

確率の定義

標本空間 S における任意の事象 A に対して $\Pr(A)$ という数を与える。$\Pr(A)$ が以下の 3 つの公理をみたすとき、それを確率と呼ぶ

1. どの事象も、それが起きる確率は非負である
$$\Pr(A) \geq 0$$
2. 全事象 S の起きる確率は 1 である
$$\Pr(S) = 1$$
3. 排反事象に関して以下の和の法則が成り立つ
$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

確率分布

- $\Pr(A)$ の A にあたる事象は色々ある（確率変数 A は様々な値をとる）
- それぞれの事象（A の各値）について確率を考える：確率分布
  - 例：「正しい」コインを 2 回投げ、表が出る回数を調べる
  - $S = \{0, 1, 2\}$
  - $\Pr(0) = 1/4, \Pr(1) = 1/2, \Pr(2) = 1/4,$
- 確率の分布の仕方は様々：確率質量関数または確率密度関数と累積分布関数で表す

確率質量関数 (PMF)

- 確率変数が離散型のとき、確率分布を表すために確率質量関数 (probability mass function: PMF) を用いる
- 確率変数 X のとる値の集合が $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ のとき、確率質量関数は、

$$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i) = \Pr(x_i)$$

と表すことができる

確率密度関数 (PDF)

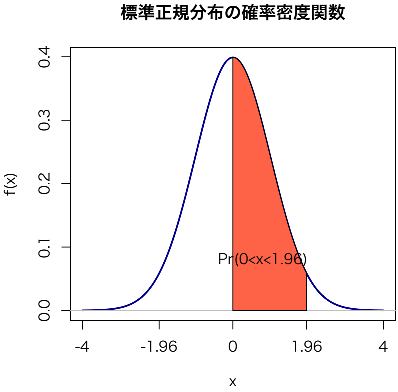
- 確率変数 X が連続型のとき、確率分布を表すために**確率密度関数 (probability density function: PDF)** を用いる
- 連続型の確率変数 X が特定の値をとる確率 $\Pr(X = x_i) = 0$ である
- 代わりに区間を用い、X が区間 $[a, b]$ の値をとる確率を確率密度関数 f_X を使って表すと

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

となる

確率密度関数の例：標準正規分布

- 標準正規分布の確率密度関数（右図）
- 横軸：変数の（とり得る）値
- 縦軸：確率密度
- 確率：確率密度関数と横軸の間の面積
  - x が $[0, 1.96]$ の値をとる確率 = 図中で赤く塗りつぶされた部分の面積



累積分布関数 (CDF)

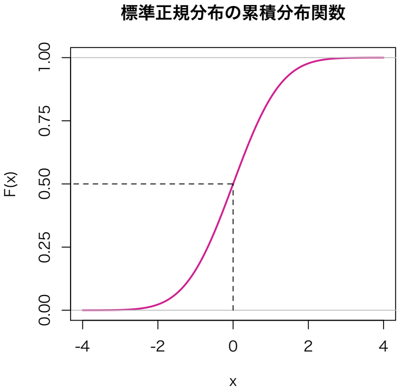
- 確率分布を表すために使われるその他の関数として、**累積分布関数 (cumulative distribution function: CDF)** がある
- 累積分布関数 F_X は

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

と表すことができる
- つまり、確率密度関数は累積分布関数の導関数である

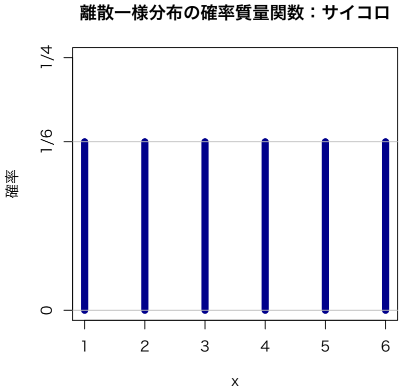
累積分布関数の例：標準正規分布

- 標準正規分布の累積分布関数（右図）
- 横軸：変数の（とり得る）値
- 縦軸：確率 $\Pr(X \leq x)$
    - 図中の点線で示されている $F(X=0)$ は X が 0 以下の値をとる確率
    - 「X が 0 になる確率」ではない！



離散一様分布 (discrete uniform distribution)

- 確率変数が n 個の値を同じ確率でとり得るときの分布
- 例：「正しい」サイコロを 1 回投げるときに出る目の確率分布（右図）

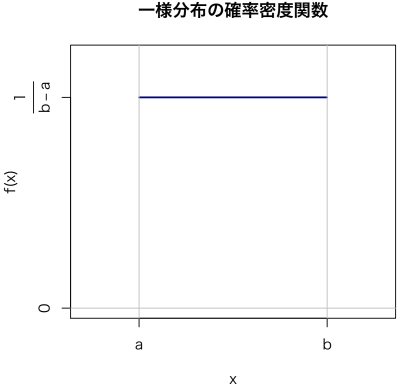


連続一様分布 (contiguous uniform distribution):$\mathsf{U}(a,b)$

$$X \sim \mathsf{U}(a,b)$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad (a \leq x \leq b)$$

- 母数：最小値 a と最大値 b
- 区間 $[a,b]$ 内で確率密度一定（一様）



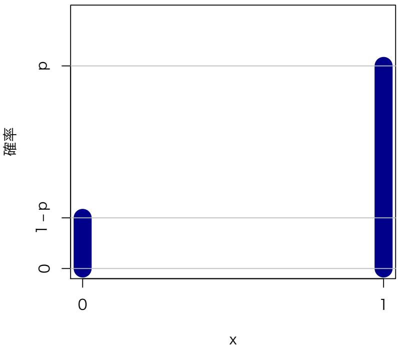
ベルヌーイ分布 (Bernoulli distribution)：$\mathrm{Ber}(p)$

$X \sim \mathrm{Ber}(p)$

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

- 確率 p で 1、$1-p$ で 0 になるような事象
- 例：「正しい」コイン投げ：$p = 1/2$ のベルヌーイ試行
- 母数：成功確率 p
- X は 1（成功）または 0（失敗）のいずれか

ベルヌーイ分布の確率質量関数



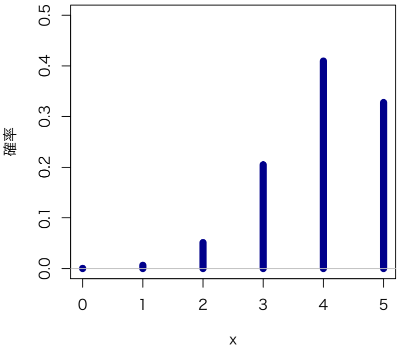
二項分布 (binomial distribution)：Bin(n, p)

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- 確率 p のベルヌーイ試行を n 回繰り返したときの成功回数の分布
- 母数：試行回数 n と 1 試行の成功確率 p
- 成功回数 $k = 0, 1, \ldots, n$

二項分布 (n=5, p=0.8) の確率質量関数

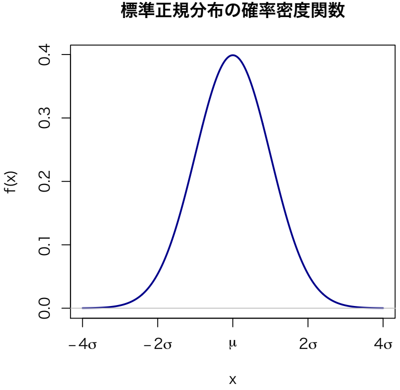


正規分布 (normal distribution)：N(μ,σ^2)

$X \sim$ N(μ,σ^2) (または N(μ,σ))

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- 母数：平均 μ と分散 σ^2
- 中心 μ に関して左右対称
- $\mu \pm \sigma$ の間の値をとる確率が約 68%
- $\mu \pm 1.96\sigma$ の間の値をとる確率が約 95%

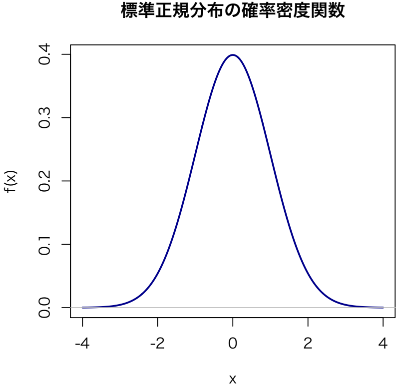


u 標準正規分布 (standard normal distribution)：$\mathsf{N}(0,1)$

$X \sim \mathsf{N}(0,1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- 正規分布のうち、$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ のもの
- 中心 0 に関して左右対称
- $[-1,1]$ の間の値をとる確率が約 68%
- $[-1.96, 1.96]$ の間の値をとる確率が約 95%

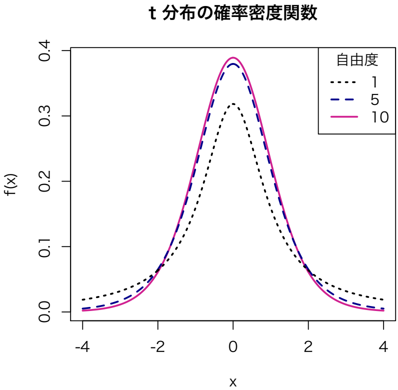


t 分布 (Student's t distribution)

$$X \sim t(\nu)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

- 母数：自由度 ν（0 より大きい実数）
- 観測数 n が十分大きくないとき、誤差の分布は t 分布に従う
- $\nu \to \infty$ で正規分布に近づく



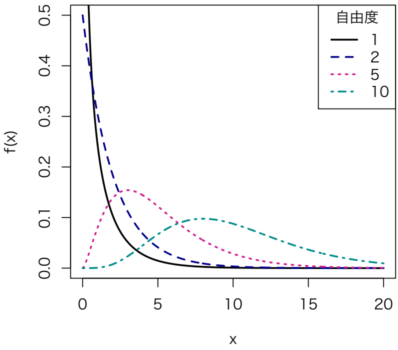
カイ二乗分布 (χ^2 distribution)

$$X \sim \chi^2(k)$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \qquad (x \geq 0)$$

- 母数：自由度 k（自然数）
- クロス表における変数間の独立性の検定などに使う
- $k \to \infty$ で正規分布に近づく（が、近づき方は遅い）

カイ二乗分布の確率密度関数



その他のよく出てくる分布

- F 分布
- ガンマ (gamma) 分布
- 負の二項 (negative binomial) 分布
- ポアソン (Poisson) 分布
- ディリクレ (Dirichlet) 分布
- コーシー (Cauchy) 分布
- etc.