高知工科大学 経済・マネジメント学群

計量経済学

10. 多重比較

やない ゆうき
矢内 勇生

https://yukiyanai.github.io

yanai.yuki@kochi-tech.ac.jp

このトピックの目標

- 多重比較とは何か
- 多重比較の方法
- 「計量経済学」のまとめ

多重比較とは？

統計的仮説検定（復習）

- t 分布による検定を考える（他の分布を利用する検定の場合も基本的な考え方は同じ）
- 有意水準（危険率）を設定する（例として有意水準が0.05の場合を考える）
- 調べたいこと：2群の平均値に差はあるか？
  - 帰無仮説：$\mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$
  - 対立仮説：$\mu_1 \neq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
- 棄却域を分布の両側に取って、臨界値 c_L, c_U を求める
  - 標本サイズ $N = 10$ の場合：自由度は $N - 1 = 9$
  - 自由度9の t 分布の臨界値は $c_L = -2.26, \quad c_u = 2.26$ $(c = 2.26)$

統計的仮説検定（復習 [続]）

- 検定統計量 T を求める
- 帰無仮説が正しいなら、$|T| > c$となる確率は5%
  - 帰無仮説が正しいなら、観測したデータで $|T| > c$ となることはめったにない
  - 有意水準は「めったにない」と言えるように決める
- めったにないことが起こるのは変なので、帰無仮説が誤っていると考える：帰無仮説を棄却する

統計的仮説検定の正当性

- 「めったにない」と言えるかどうかが鍵
- 「有意水準50%で棄却」
  - 帰無仮説が正しいときに、帰無仮説を棄却する確率が50%
  - 対立仮説を信じられない！
- 「有意水準5%で棄却」
  - 帰無仮説が正しいときに、帰無仮説を棄却する確率が5%
  - 5%なら、まあいいか…
- 研究分野によっては、5%では納得しない
  - 1%？、0.1%?、……

多重比較の問題 (1)

- 3つのグループの平均値に差があるか調べたい
- 3つの帰無仮説
  - $\mu_1 = \mu_2$
  - $\mu_1 = \mu_3$
  - $\mu_2 = \mu_3$
- 有意水準5%で検定する

多重比較の問題 (2)

- 帰無仮説が3つとも正しい場合について考える
- 平均値の差の検定（t 検定）を3回実施する
  - 帰無仮説が正しいので、3回とも帰無仮説を保留したい
- 少なくとも1つの帰無仮説を誤って棄却してしまう確率は？

$$1-(1-0.05)^3=0.14$$

- つまり、危険率は14%!

多重比較の問題 (3)

- 1つひとつの比較に使った有意水準と、全体の有意水準が一致しない
  - 例の場合：「めったにない」基準として5%を選んだはずなのに、全体の有意水準が14%になってしまう
  - 14%は「めったにない」というには多すぎる
- 比較対象が複数あるときに、有意水準をそのまま使うと、結果の信頼性が著しく損なわれることがある
  - ただし、いつもそうなるわけではない

多重比較の問題 (4)

- 帰無仮説が4つ：$1 - (0.95)^4 \approx 0.185$
- 帰無仮説が5つ：$1 - (0.95)^5 \approx 0.226$
- ・・・
- 帰無仮説が10個：$1 - (0.95)^{10} \approx 0.401$
- ・・・
- 比較する組み合わせが増えると、問題が深刻になる

有意水準を調整して対処する

- 帰無仮説が3つある場合
- 全体の有意水準が5%以下になる α を探す：以下の式を満たす α を見つけたい

$$1 - (1 - \alpha)^3 \leq 0.05$$

- $\alpha = 0.0169$ を選ぶ

$$1 - (1 - 0.0169)^3 \approx 0.0498$$

多重比較の基本方針

- 全体の有意水準を「めったにない」水準にする
- そのために、1つひとつの比較で利用する有意水準を小さくする
- この方法の問題
  - 検出力が下がる
    - 検出力：帰無仮説が誤っているときに、帰無仮説を棄却する確率
    - 「帰無仮説を棄却したくない問題」で悪用されるおそれがある

多重比較調整が不要な場合 (1)

- 『Yによる計量経済学』の学習効果 (μ_y) が既存の2つの教科書の学習効果より高いか確かめたい
  - 『Rによる計量政治学』(μ_r)：帰無仮説1 $\mu_y = \mu_r$
  - 『Stataによる計量政治学』(μ_s)：帰無仮説2 $\mu_y = \mu_s$
- それぞれの仮説を有意水準5%で検定するとどうなる？

多重比較調整が不要な場合 (2)

- 「『Y〜』の効果が高い」という**誤った**結論を出す確率は？
- 帰無仮説が2つとも正しい場合

$$0.05 \cdot 0.05 = 0.025$$

- 帰無仮説1のみが正しい場合

$$0.05 \times \Pr(|T_2| > |c_2|) \leq 0.05$$

- いずれの場合も、全体の有意水準が5%以下になる
  - つまり、多重比較の調整は不要

多重比較調整が不要な場合 (3)

- 帰無仮説を1つずつ個別に考える場合は、調整が必要
  - 「帰無仮説1を棄却 or 帰無仮説2を棄却 or ・・・」の確率は帰無仮説が増えると大きくなる
- 複数の帰無仮説が同時に棄却されるかどうかを調べる際は、調整不要
  - 「帰無仮説1を棄却 and 帰無仮説2を棄却 and ・・・」の確率は帰無仮説が増えても大きくならない（ほとんどの場合、小さくなる）
- 仮説全体を「または (or)」で捉えるか、「かつ (and)」で捉えるかの区別が重要

多重比較が問題になる例

- レストランのワインセラーにたくさんのワインが保存されていて、酸化して品質が悪くなっているものが5%含まれている
- ランダムにワインを提供するとする
- 1人で来た客がワインを1本注文するとき、そのワインが粗悪品だとその客のディナーは台無しになる。店は何パーセントの客に謝罪することになる？
- 10本のワインが提供されるパーティーが開催されるとき、1本でも悪いワインがあるとパーティーは台無しになる。店は何パーセントのパーティーで謝罪することになる？

出典：佐久間昭 (1987) 『医学統計Q&A』金原出版

多重比較にご用心

- 5%の確率で当たるくじがある。A, B, …, T の20人がこのくじを引いたところ、Kさんだけが当たりを引いた。これは珍しいこと？
- 上の例について「Kさんが1回だけくじを引いたら当たった」（ウソではない）と書くと、どう感じる？

出典：永田靖 (1996) 『統計的方法のしくみ』日科技連出版社

多重比較の方法

多重比較の方法

- 多重比較の方法は色々ある
- 状況と目的に応じて使い分ける必要がある
  - 古い本には「使ってはいけない」方法が書かれている（推奨されている）場合があるので注意
  - プロジェクト研究で多重比較を行う際は指導教員とよく相談すること
- ここでは、代表的な方法のみ紹介する
  - 詳しくは、永田・吉田 (1997) を参照されたい

多重比較の考え方

- 検証の対象となる帰無仮説すべてを明らかにする
  - K 個の帰無仮説 H_{0k} $(k = 1,2,\ldots,K)$
- 検証する帰無仮説の集合

$$\mathscr{F} = \{H_{01}, H_{02}, \ldots, H_{0K}\}$$

  - これを「帰無仮説族」または「ファミリー」とよぶ
- 多重比較では、設定したファミリーについて結論を出す
  - ファミリーに対する有意水準を「めったにない」ものにする
  - ファミリーに含む帰無仮説は**事前に**決める必要がある

ボンフェローニの方法 (1)

- ボンフェローニ (Bonferroni) の方法
- K 個の事象 E_k $(k = 1, 2, \ldots, K)$ について、以下の不等式が成り立つ

$$\Pr\left(\bigcup_{k=1}^{K} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{K} \Pr(E_k)$$

  - これをボンフェローニの不等式という

ボンフェローニの方法 (2)

- 検定の対象：$\mathscr{F} = \{H_{01}, H_{02}, \ldots, H_{0K}\}$
- E_k：帰無仮説 H_{0k} が誤って棄却される事象
  - これをボンフェローニの不等式に当てはめる

$$\Pr\left(\bigcup_{k=1}^{K} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{K} \Pr(E_k)$$

Ｐｒ(正しい帰無仮説のうち少なくとも1つの帰無仮説が棄却される)

$$\leq \sum_{k=1}^{K} \Pr(\text{正しい帰無仮説 } H_{0k} \text{ が棄却される})$$

ボンフェローニの方法 (3)

- Pr(正しい帰無仮説 H_{0k} が棄却される) $\leq \dfrac{\alpha}{K}$ とすれば、不等式の

  右辺は

$$\sum_{k=1}^{K} \text{Pr(正しい帰無仮説 } H_{0k} \text{ が棄却される)} \leq K \times \frac{\alpha}{K} = \alpha$$

- したがって、

  Pr(正しい帰無仮説のうち少なくとも1つの帰無仮説が棄却される) $\leq \alpha$

- ファミリーを構成する個々の仮説を有意水準 α/K で検定すれば、全体の有意水準が α 以下になる

ボンフェローニの方法の注意

- データを取得するより前に、検定の対象となるファミリーを確定させる必要がある
  - 帰無仮説の形
  - ファミリーを構成する帰無仮説の個数
- データを取った後で有意になりそうなK 個の仮説を選んでは**ダメ！**
- ボンフェローニの方法はかなり保守的：帰無仮説が棄却されにくい
  - 帰無仮説を棄却したくない場面で悪用されやすい

ホルム (Holm) の方法 (1)

- ボンフェローニの方法は保守的過ぎる
- ホルムの方法：ボンフェローニの方法の改良版
- 検定の対象：$\mathscr{F} = \{H_{01}, H_{02}, \ldots, H_{0K}\}$
- それぞれ帰無仮説について、検定統計量 T_k を求める
- $|T_k|$ を大きい順に並べ、$T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(K)}$ と名付ける
- $T^{(j)}$ に対応する帰無仮説を $H_0^{(j)}$ と表す

ホルム (Holm) の方法 (2)

- $j = 1$ から考える
- $H_0^{(j)}$ を有意水準 $\alpha_j = \alpha/(K - j + 1)$ で検定する
  - $\alpha_1 = \alpha/K, \quad \alpha_2 = \alpha/(K-1), \quad \ldots, \quad \alpha_K = \alpha$
- $H_0^{(j)}$ が保留されたら、$H_0^{(j+1)}, \ldots, H_0^{(K)}$ もすべて保留して検定を終了する
- $H_0^{(j)}$ が棄却されたら
  - $j = K$ の場合は検定終了
  - $j < K$ の場合は j を1増やして（次の仮説を）同様に検定する

ボンフェローニ vs. ホルム

- ホルムの方法で $\alpha_j = \alpha/K$ とすると、ボンフェローニの方法になる
- $\alpha/K = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k = \alpha$ である
  - ボンフェローニの方法で棄却される個々の帰無仮説は、ホルムの方法でも必ず棄却される
  - 逆は成り立たない
- ホルムの方法は、ボンフェローニの方法の「保守的過ぎる（検出力が低い）」という点を改善している

多重比較法のまとめ

- **事前に**ファミリーを設定し、ファミリーに対して検定を行う
- ファミリーの有意水準を α にするために、個々の帰無仮説の検定では α の値を調整する
- ボンフェローニの方法：α/K（K はファミリーに含まれる帰無仮説の個数）を利用する
    - メリット：簡単
    - デメリット：保守的過ぎる（検出力が低い）
- ボンフェローニの改良版：ホルムの方法

計量経済学のまとめ

計量経済学

- 経済理論をデータによって検証する
  - 理論から作業仮説（観察可能な予測）を導出し、それを推測統計学の方法で検証する
  - 経済以外の分野でも基本は同じ：応用可能
- 統計モデル
  - 理論のエッセンスを取り出す
  - データ生成過程 (DGP) を考える

重要なポイント

- 「すべてのモデルは誤りだが、役に立つものもある」by George Box
  - 大事な部分を取り出して、単純化する
  - データ生成過程をうまくモデル化する
  - 変数の操作化、作業仮説が大事
- データ分析は、データを揃えて分析の準備を整えるまでが大変
- Rで分析結果（推定値）を出すこと自体ではなく、出てきた結果を解釈することが重要
- 「統計的に有意？ふ〜ん。で？だから何？？？」
  - 研究の目的は、統計的に有意な結果を見つけることではなく、リサーチクエスチョンに答えること
- グラフによるコミュニケーションが重要

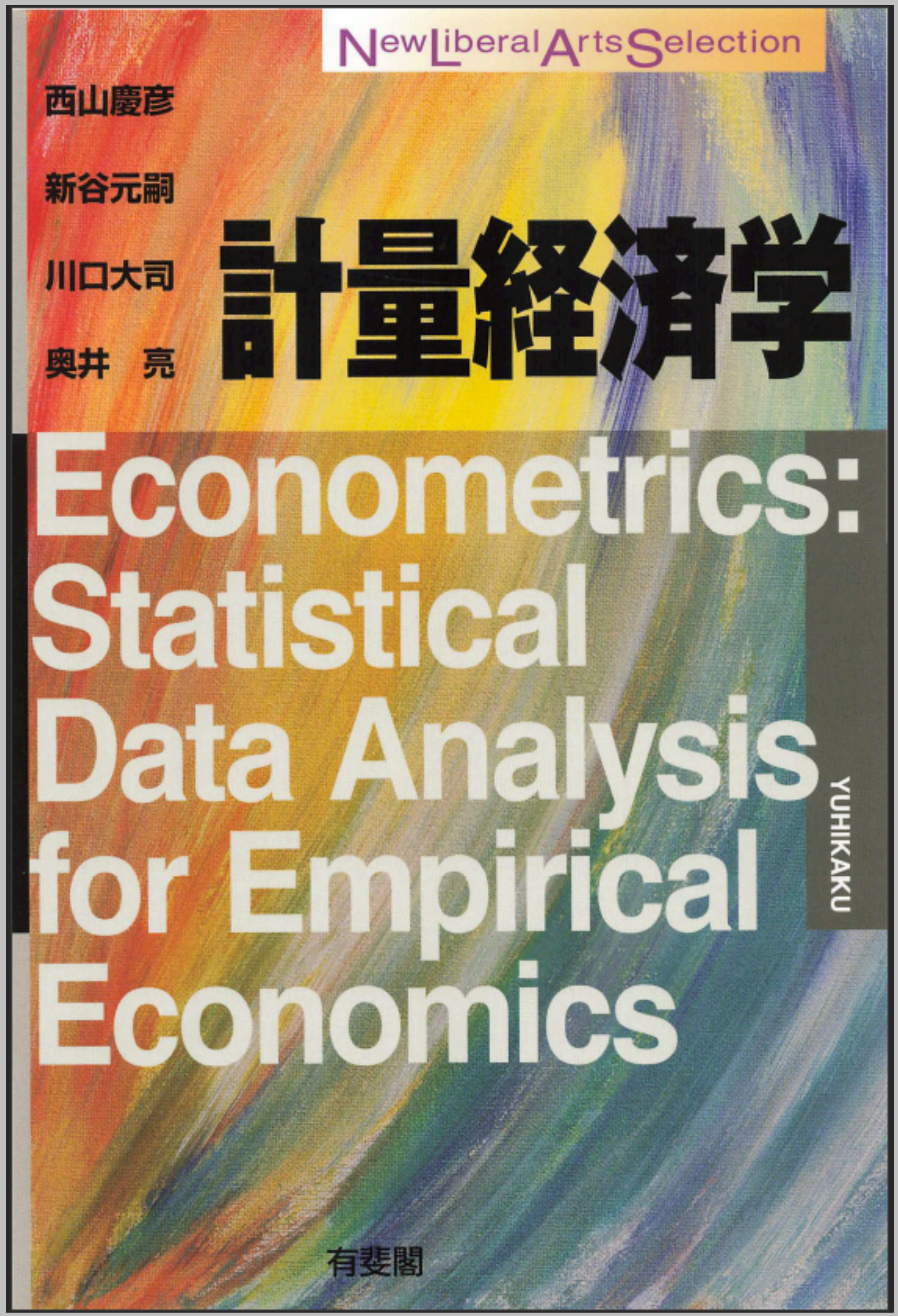
この授業で扱えなかったトピック

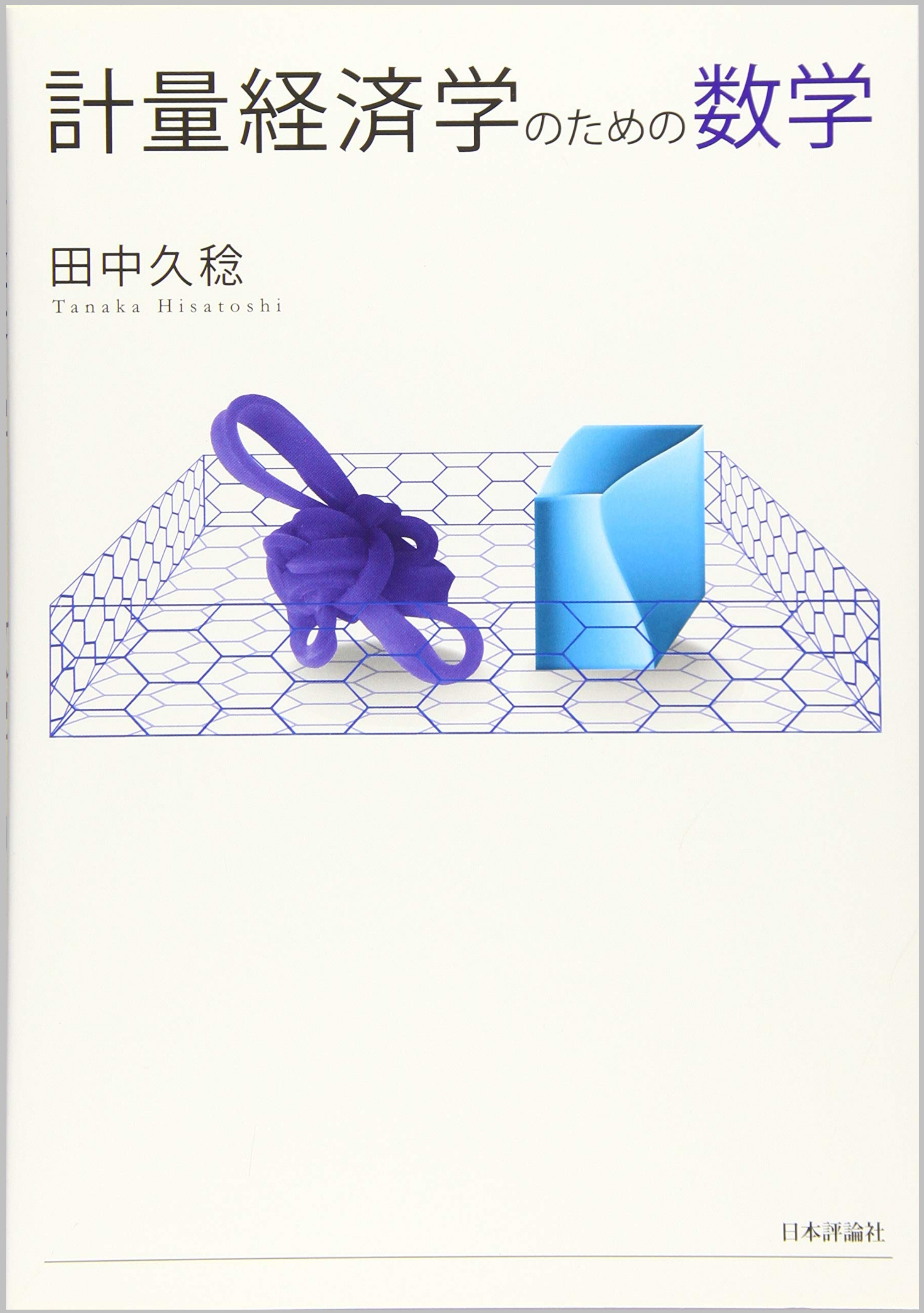
- 線形回帰のトピック
  - 回帰診断（教科書 第12章）
  - 分散が不均一な場合の分析
- 発展的なトピック
  - 時系列分析
  - パネルデータ（クロスセクション-時系列）分析
  - 一般化線形モデル（generalized linear models; GLM）

さらなる理解のために

- さまざまなデータに触れよう
- 検証すべき理論の理解を深めよう
  - 計量経済学の手法を「道具」として利用する
- 数学（微分・積分、線形代数、確率）を勉強しよう
- 「計量経済学応用」（統計的因果推論）を受講しよう

計量経済学をもっと勉強したい？





英語で計量経済学

- Wooldridge, Jeffrey M. 2019. *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Seventh Edition. South-Western Pub.
    - 第5版のPDF が公開されている
- Davidson, Russell, and James G. MacKinnon. 2009. *Econometric Theory and Methods*. International Edition. Oxford University Press.
- Hansen, Bruce. 2021. *Econometrics.* https://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/econometrics/

数理モデル


浜田 宏
その問題、
数理モデル
が解決します
社会を解き明かす
数理モデル入門


その問題、やっぱり
数理モデル
が解決します
データ時代を生き抜く
ための数理モデル入門
浜田 宏

Rを使って楽をしよう！

- Rはデータ分析やその他の勉強・研究を進める上で、強力な武器
- Rを使って「楽をする」ことで、余った時間をもっと大切なことに使うことができる
- この授業を最後までやりきった：立派なRユーザ！
- Rにもっともっともっと触れよう！
  - データの分析・可視化
  - シミュレーションを通じた理論の理解
  - 楽をするための道具の開発
    - 参考：rgamer (https://github.com/yukiyanai/rgamer)


See you!