高知工科大学 経済・マネジメント学群

統計学 2

9. t 分布と母平均の推定

やない ゆうき
矢内 勇生

https://yukiyanai.github.io

yanai.yuki@kochi-tech.ac.jp

このトピックの目標

- 標本平均から母平均を推定する方法を理解する
  - もうやったのでは？？？
- t 分布を理解しよう！

©2021 Yuki Yanai

母平均の推定：母分散が既知の場合（復習）

- 母平均の点推定：標本平均 = 点推定値
- 母平均の区間推定：
  - 標本平均の分布が正規分布に従うと考え、95%信頼区間を求めた
  - μ_x の95%信頼区間

$$\left[\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}},\ \ \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] = \left[\bar{x} - 1.96 \cdot \mathrm{SE},\ \ \bar{x} + 1.96 \cdot \mathrm{SE}\right]$$

  - 母分散 σ^2（あるいは母標準偏差 σ）が既知と仮定

©2021 Yuki Yanai

t 分布と区間推定

母分散が未知だったら？

$$\left[\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}},\ \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$$

- 母分散を知らない → 上の式が統計量にならない（標本から数値を得ることができないから）
- どうする？
  - 区間推定の方法を変える
    - ただし、点推定値は変わらない

©2021 Yuki Yanai

母分散を知らない (かつ N が十分大きくない) ときの区間推定

- σ を知らないとき：σ の推定量として u を使う
  - $\dfrac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{u}{\sqrt{N}}}$ は標準正規分布に従わない
  - 標準正規分布を使って求める信頼区間は使えない
    - 標準正規分布の代わりに t **分布** を利用する

©2021 Yuki Yanai

分散 (variance)

- 分散：データのばらつき（散らばり具合）を表す統計量
- 0以上の値をとる（データの値がすべて等しいとき0）
- データのばらつきが大きいほど、分散も大きくなる

©2021 Yuki Yanai

分散の求め方（復習1）

- 標本分散を表す記号：s^2（σ^2 は母分散）

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

©2021 Yuki Yanai

標本分散の求め方（復習2）

1. 標本平均を求める
2. 偏差（= 観測値 - 標本平均）を各観測値について求める
3. それぞれの偏差を2乗する
4. 偏差の2乗をすべて足して、標本サイズ（N）で割る（偏差^{2}の平均値を求める）

©2021 Yuki Yanai

標本分散の求め方（復習3）

- 右のデータの分散を求めてみる

$$s^2 = \frac{16 + 1 + 0 + 4 + 9}{5}$$

$$= \frac{30}{5} = 6$$

	x	偏差	偏差^2
	1	-4	16
	4	-1	1
	5	0	0
	7	2	4
	8	3	9
計	25	0	30

©2021 Yuki Yanai

標本分散の偏り

- 標本をいくつも抽出し、それぞれの標本について標本分散を求める：

標本分散の平均値 < 母分散

➡ 標本分散を母分散の推定に使うと、（小さい方に）偏ってしまう

★ 偏りがない分散の求め方は？

©2021 Yuki Yanai

不偏分散（unbiased variance）

- 母分散の偏りのない推定値として使える
- 記号：u^2 で表す
- 分散を求める式の分母を少しだけ小さくする

$$u^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

©2021 Yuki Yanai

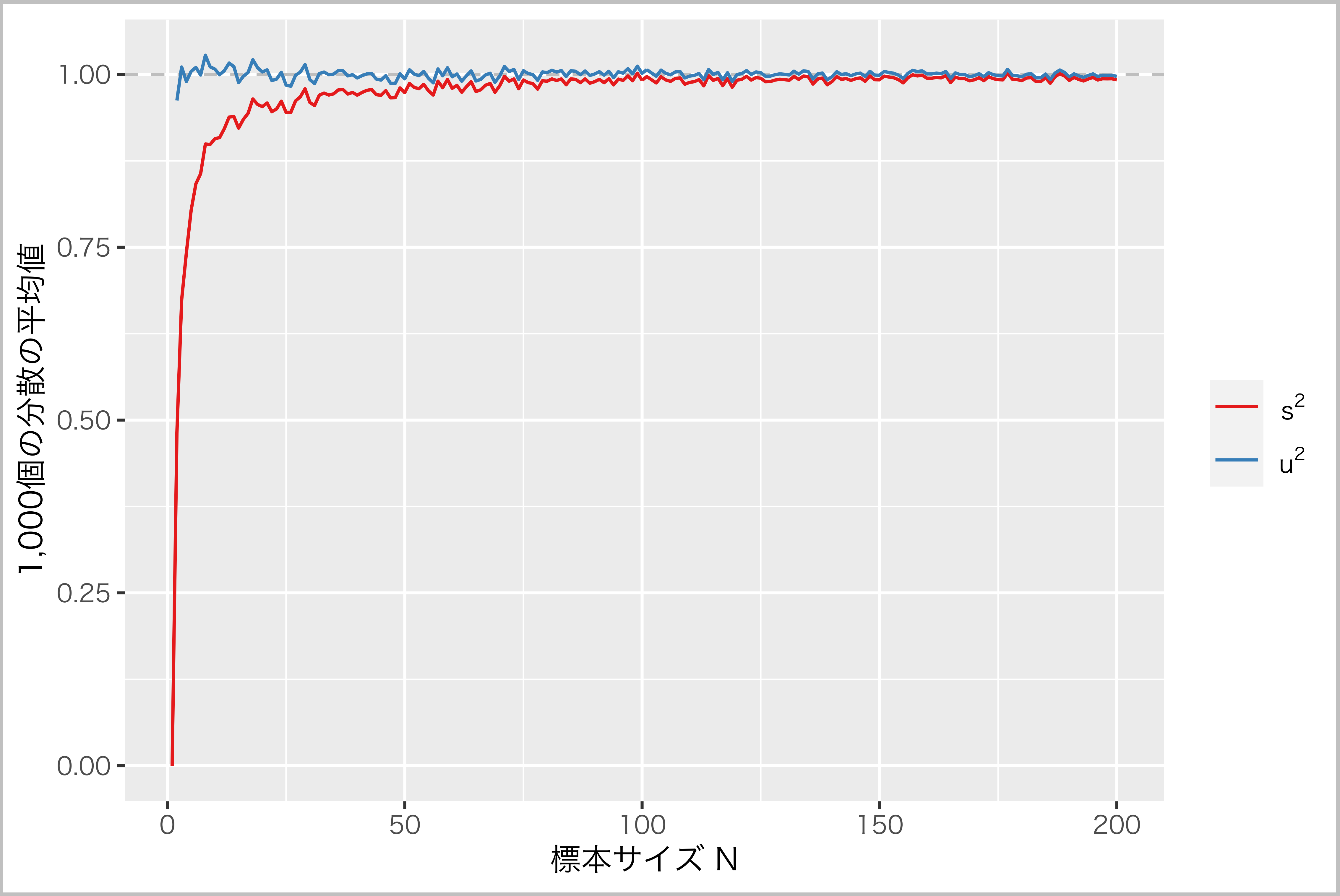
不偏分散（続）

- 不偏分散：母分散の点推定値
  - Rでは var() で求める
- 標準偏差の点推定値は：u（不偏分散の平方根）
  - N が十分大きいときは、N で割ってもよい（結果がほとんど同じなので）
  - 母平均を知っているときは、N で割って分散を求める

©2021 Yuki Yanai

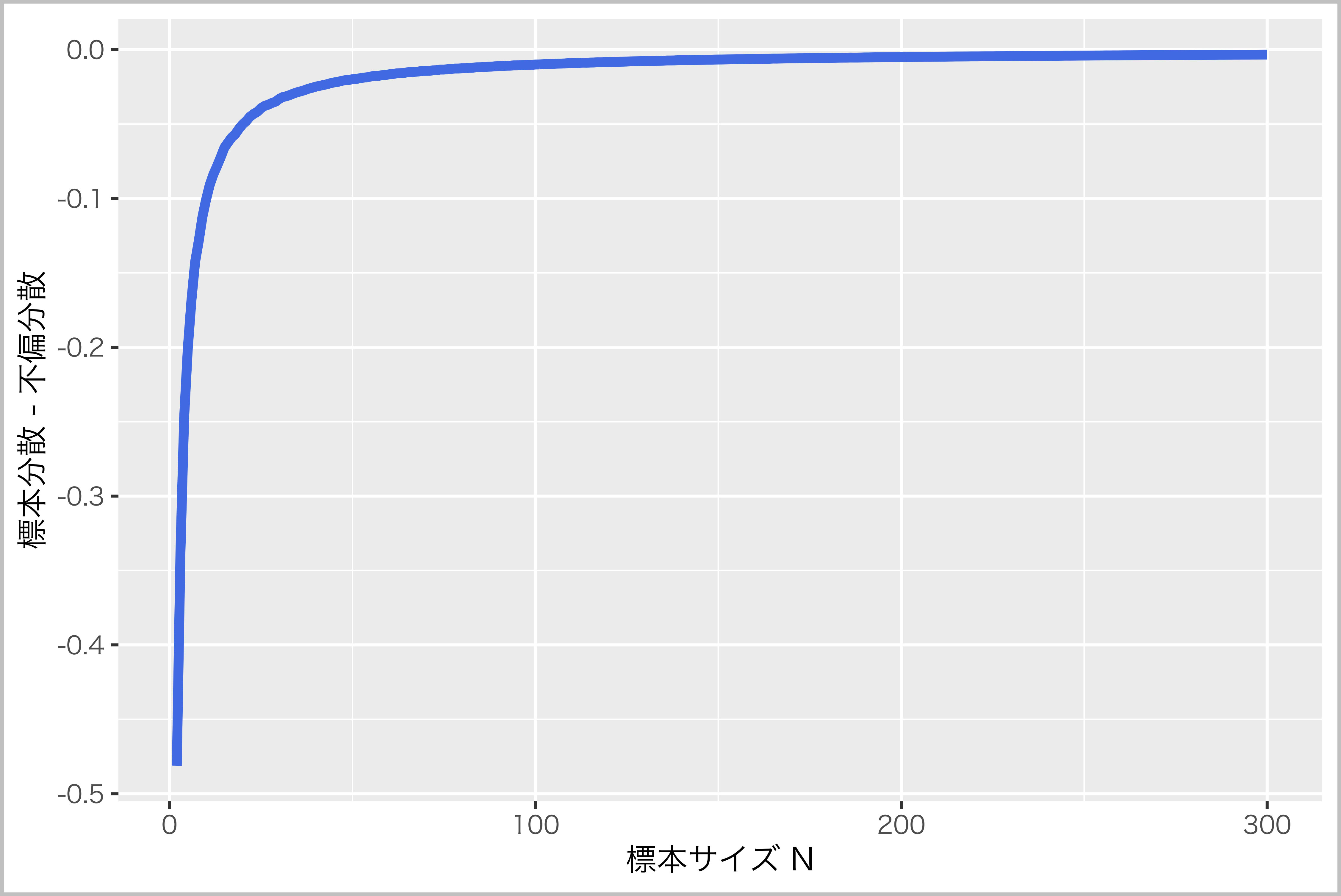
標本分散と不偏分散の平均値

標準正規分布 から各 N について1000個の標本を抽出



©2021 Yuki Yanai

標本分散と不偏分散の差



©2021 Yuki Yanai

母分散を知らない（かつ N が十分大きくない）ときの区間推定

- σ を知らないとき：σ の推定値として u を使う
  - $\dfrac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{u}{\sqrt{N}}}$ は標準正規分布に従わない
  - 標準正規分布を使って求める信頼区間は使えない
    - 標準正規分布の代わりに t **分布** を利用する

©2021 Yuki Yanai

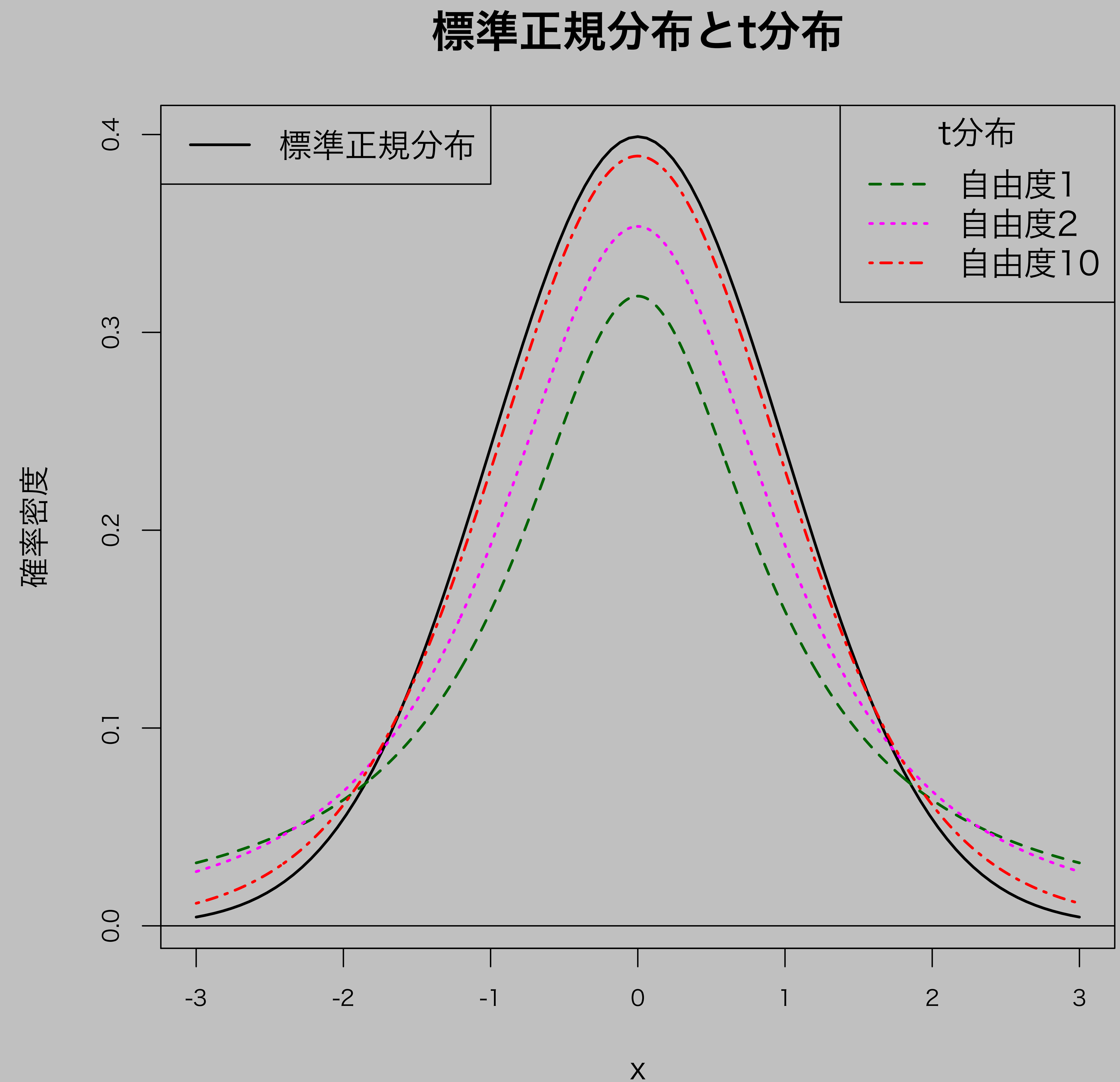
t 分布 (Student's t distribution)

- スチューデント（Student）の t 分布
- 確率密度関数：

$$f(x \mid k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

  - ただし、k は x の自由度、$\Gamma(.)$ はガンマ関数

©2021 Yuki Yanai



©2021 Yuki Yanai

t 分布の特徴

- 自由度によって形が決まる
- 概形は標準正規分布に似ている
  - 分布の中心は0
  - 標準正規分布より山の頂上が低い
  - 標準正規分布より裾が厚い
- 自由度が大きくなるにつれ、標準正規分布に近づく

©2021 Yuki Yanai

ウィリアム・ゴセット (William Sealy Gosset：1876-1937)

- イギリスの統計学者・醸造技術者（ギネス社に勤務）
- 推測統計学の確立に貢献
- ペンネーム：Student
- t 分布を発見した

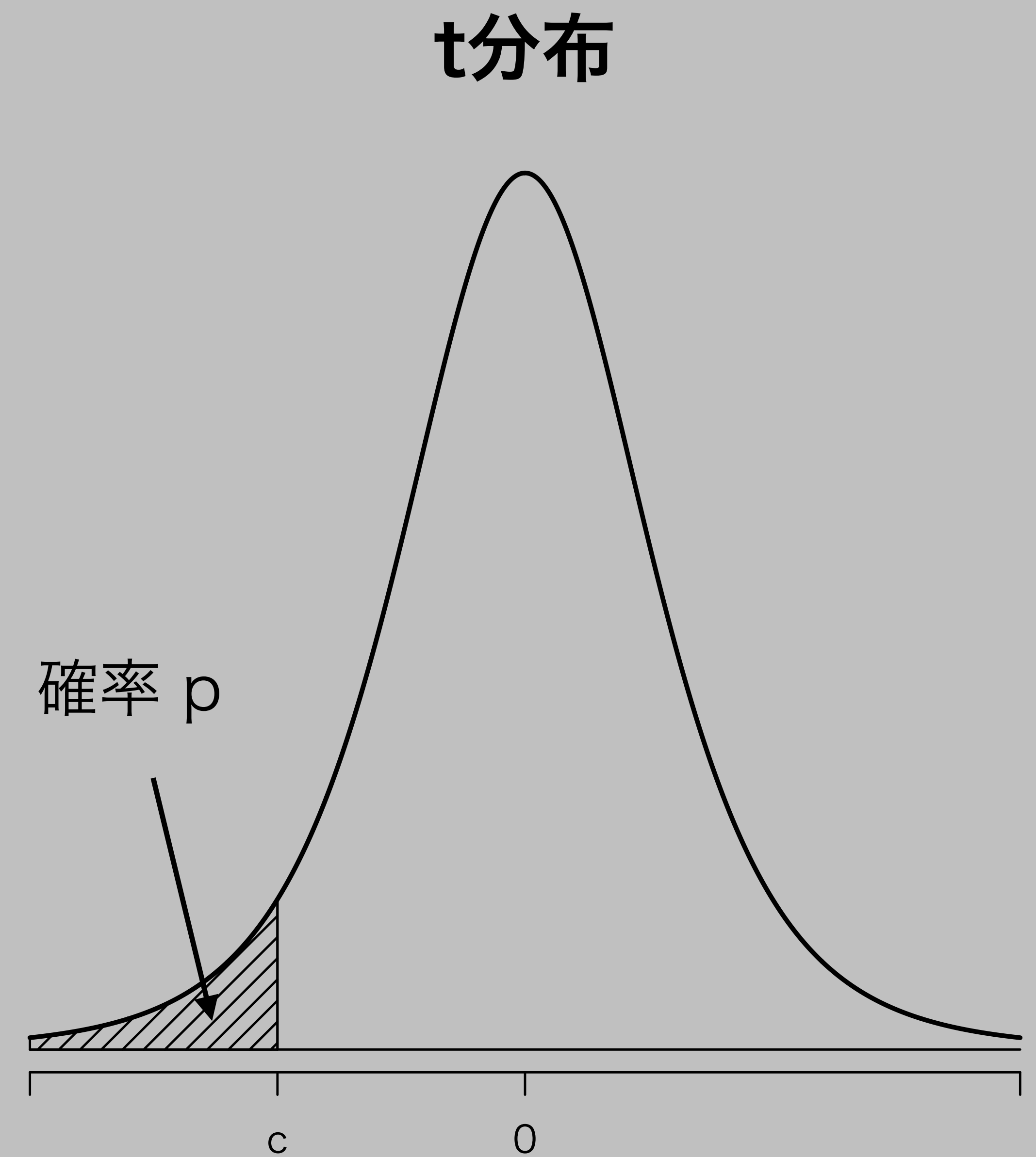
©2021 Yuki Yanai

t 分布の使い方

- 自分が求めたい確率 p と自由度 df の組み合わせを決める
- RでCを求める

  ```
  qt(p, df)
  ```

- t 分布は左右対称なので、片側（負の側、左側）の c がわかれば、反対側（正の側、右側）$-c$ もわかる



©2021 Yuki Yanai

標本平均と t 分布

- $\dfrac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{u}{\sqrt{N}}}$ は、自由度 $N-1$ の t 分布に従う

- 標本サイズ $N = 10$ のとき
  - 自由度は9： $p = 0.025$ とすると、$c = -2.2622$
  - 標本の95%について

$$-2.2622 \leq \frac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{u}{\sqrt{N}}} \leq 2.2622$$

©2021 Yuki Yanai

一般的な場合

- 一般的に、自由度 k と 確率 p によって決まる t 分布の$-c$ を $t_{k,p}$ と書くことにすると、標本の$100(1-2p)$%について、

$$-t_{N-1,p} \leq \frac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{u}{\sqrt{N}}} \leq t_{N-1,p}$$

  となる

- $p = 0.025$ なら、$(1 - 2 \cdot 0.025) = 0.95$（つまり95%）について、

$$-t_{N-1,0.025} \leq \frac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{u}{\sqrt{N}}} \leq t_{N-1,0.025}$$

©2021 Yuki Yanai

母平均の95%信頼区間

$$-t_{N-1,0.025} \leq \frac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{u}{\sqrt{N}}} \leq t_{N-1,0.025}$$

- 上の式のうち、標本平均 $\bar{x}$ 、不偏分散の平方根 u 、標本サイズ N は知っていて、母平均 μ_x を推定したい
  - 上の不等式を μ_x について解けばよい

$$\bar{x} - t_{N-1,0.025}\frac{u}{\sqrt{N}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + t_{N-1,0.025}\frac{u}{\sqrt{N}}$$

©2021 Yuki Yanai

このトピックのまとめ

- 母平均の点推定値は標本平均
- 母平均の信頼区間の求め方は、状況によって異なる
  - 母分散が既知~~（または標本サイズ N が十分大きいとき）~~
    - 標準正規分布を使った信頼区間
  - 母分散が未知
    - t 分布を使った信頼区間
- 実習：
  - https://yukiyanai.github.io/jp/classes/stat2/contents/R/t-distribution.html

©2021 Yuki Yanai

次回予告

10. 2つの平均値を比較する